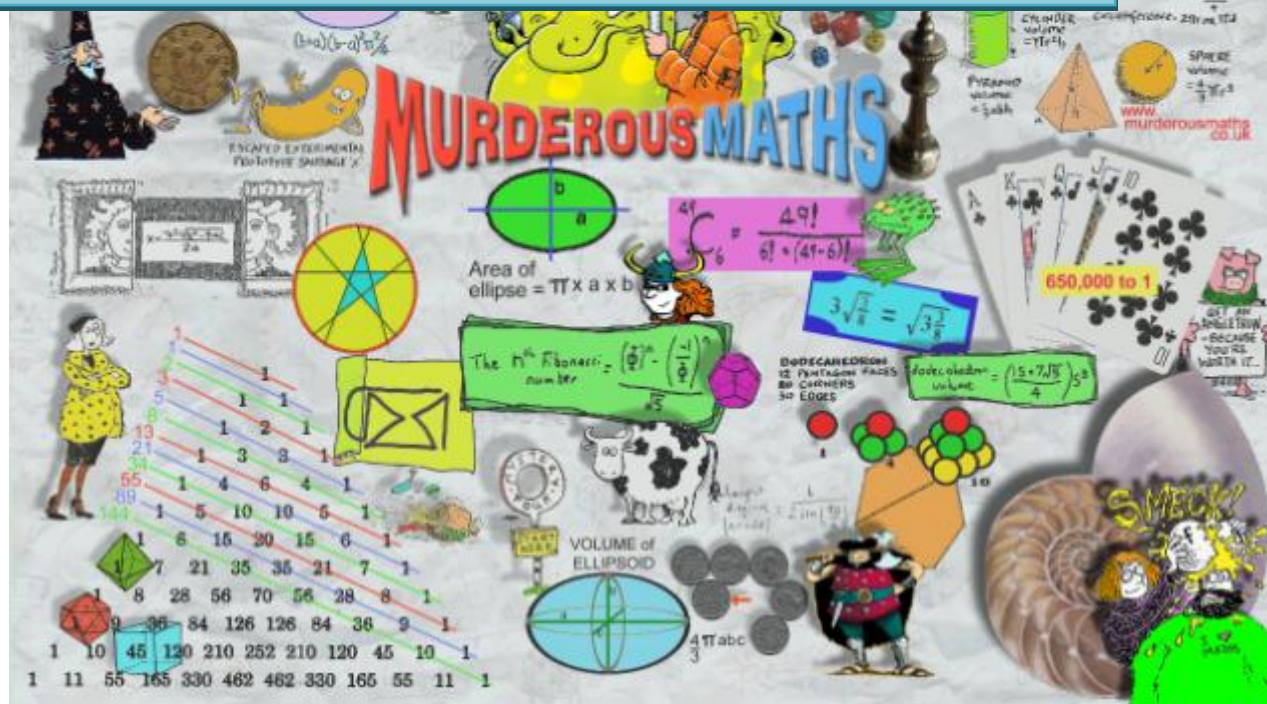


2013

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

(ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ)

ΘΕΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Ε' & ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Δραστηριότητες Προσέγγισης Συστημάτων
Αρίθμησης και Κλασμάτων με την Βοήθεια
της Λογοτεχνίας και Χειραπτικών Υλικών.

Μακρής Νικόλαος

25/6/2013



ΟΜΑΔΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΟΜΑΔΑΣ

2-	10×		12×	
	2÷		9+	2÷
3-	1-	1		
		4-		2-
3-		1-		



ΣΥΖΗΤΗΣΗ

«Μαθαίνω μαθηματικά γιατί τα χρησιμοποιώ κάθε μέρα της ζωής μου»

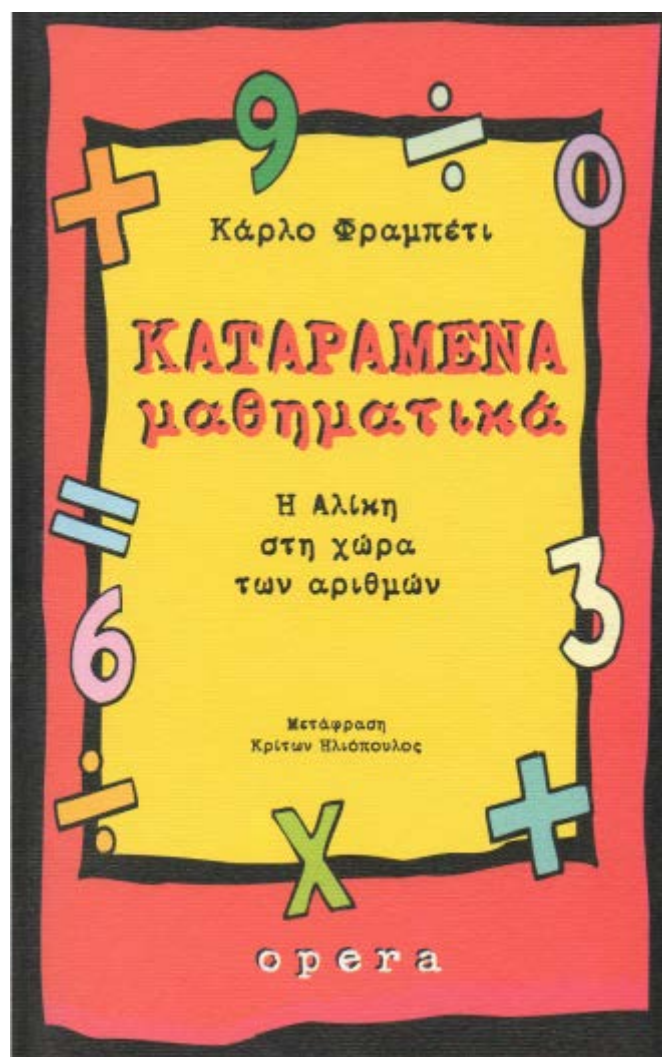
Πόσες φορές έχετε ακούσει αυτή τη φράση από τους δασκάλους/ες σας; Μπορείτε να συζητήσετε στην ομάδα σας και στη συνέχεια στη τάξη κάποια στοιχεία που ... «αληθεύουν την πρόταση»; Δηλαδή σε ποιες καθημερινές σας ασχολίες χρησιμοποιείτε μαθηματικά;

ΣΥΖΗΤΗΣΗ (Στα πλαίσια της ομάδας αρχικά, στα πλαίσια της ολομέλειας στη συνέχεια).

Συζητήσετε με την ομάδα σας, και στη συνέχεια στη τάξη σας για το ποιος ή ποιοι πιστεύετε ότι «ανακάλυψαν» τα μαθηματικά. Τι προβλήματα νομίζετε ότι προσπάθησαν να λύσουν αυτοί που ανακάλυψαν τα μαθηματικά;

ΣΥΖΗΤΗΣΗ (Στα πλαίσια της ομάδας αρχικά, στα πλαίσια της ολομέλειας στη συνέχεια).

Ανάγνωση του αποσπάσματος «Το παραμύθι των υπολογισμών» από το Βιβλίο «Καταραμένα μαθηματικά»



Το παραμύθι των υπολογισμών

«Μια φορά κι έναν καιρό — πάνε πάρα πολλά χρόνια —, ήταν ένας βοσκός που είχε ένα πρόβατο» άρχισε να διηγείται ο άντρας. «Καθώς είχε ένα πρόβατο όλο κι όλο, δε χρειαζόταν να το μετράει. Αν το 'βλεπε, πήγαινε να πει πως ήταν εκεί. Αν δεν το 'βλεπε, πήγαινε να πει πως έλειπε, και τότε έβγαινε στη γύρα να το ψάξει... Μετά από λίγο καιρό, ο βοσκός απόκτησε κι άλλο πρόβατο. Ήδη, τα πράγματα έγιναν πιο σύνθετα, γιατί άλλοτε τα 'βλεπε και τα δυο μαζί, άλλοτε μόνο το ένα, κι άλλοτε δεν έβλεπε κανένα...»

«Κι εγώ ήδη ξέρω πώς συνεχίζει η ιστορία» τον διέκοψε η Αλίκη. «Μετά, ο βοσκός βρέθηκε με τρία πρόβατα κι έπειτα με τέσσερα... Κι

αν συνεχίσουμε να μετράμε πρόβατα, εμένα θα με πάρει ο ύπνος.»

«Μην είσαι ανυπόμονη, τώρα αρχίζει το καλύτερο. Πράγματι, το κοπάδι του βοσκού σιγά σιγά μεγάλωνε, κι αυτός όλο και δυσκολευόταν να κάνει τον έλεγχο του για να δει αν όλα τα πρόβατα ήταν εκεί κι αν δεν του έλειπε κανένα. Αλλά, όμως, τη μέρα που έφτασε να 'χει δέκα πρόβατα, έκανε μια καταπληκτική ανακάλυψη: αν σήκωνε ένα δάχτυλο για κάθε πρόβατο και δεν έλειπε κανένα, τότε έπρεπε να βρεθεί με όλα τα δάχτυλα υψωμένα — και των δύο χεριών.»

«Σπουδαία χαζο-ανακάλυψη» σχολίασε η Αλίκη.

«Εσένα σου φαίνεται χαζή επειδή σου μάθανε να μετράς από μικρή, αλλά του βοσκού κανείς δεν του 'χε μάθει. Και μη με διακόπτεις... Όσο ο βοσκός είχε μόνο δέκα πρόβατα, όλα πήγαιναν καλά. Όμως, σύντομα, βρέθηκε με λίγα ακόμα, και τότε πια τα δάχτυλα δεν του έφταναν.»

«Μπορούσε να χρησιμοποιήσει και τα δάχτυλα των ποδιών.»

«Μπορεί, αν τύχαινε να 'ναι ξυπόλυτος» συμφώνησε ο άντρας. «Πράγματι, κάποιοι αρχαίοι πολιτισμοί το έκαναν κι αυτό, και μετρούσαν είκοσι-είκοσι τα πράγματα αντί για δέκα-δέκα, όπως κάνουμε εμείς. Έλα, όμως, που ο βοσκός φορούσε τσαρούχια και δεν τον βόλευε καθόλου να τα βγάζει για να μετράει... Έτσι, λοιπόν, του ήρθε μια καλύτερη ιδέα: όταν του τελειωναν τα δέκα δάχτυλα, έβαζε μια πετρούλα μέσα σ' ένα ξύλινο πιάτο κι άρχιζε να μετράει πάλι απ' την αρχή με τα δάχτυλά του, από το ένα. Ήξερε, όμως, πως η πετρούλα του μέσα στο πιάτο άξιζε για δέκα.»

«Και δεν ήταν πιο εύκολο να θυμάται ότι είχε κιόλας χρησιμοποιήσει τα δάχτυλά του μία φορά;»

«Όπως λέει μια παροιμία, μόνο οι κουτοί εμπιστεύονται τη μνήμη τους. Σκέψου ακόμα ότι ο βοσκός μας ήξερε πως το κοπάδι του όλο και θα μεγάλωνε, κι άρα χρειαζόταν ένα

σύστημα που θα του χρησίμευε για να μπορεί να μετράει όλα του τα πρόβατα, όσα κι αν ήταν. Απ' την άλλη, η ιδέα με τις πετρούλες τον βόλεψε πολύ γιατί του ξεκούρασε τα χέρια. Κι έτσι, αντί να σπκώνει τα δάχτυλά του για τα πρώτα δέκα πρόβατα, άρχισε να χρησιμοποιεί τις πέτρες που τις έβαζε σ' ένα άλλο πιάτο, αυτή τη φορά πήλινο.»

«Τι μπλέξιμο!»

«Κανένα μπλέξιμο. Είναι πιο εύκολο να το κάνεις παρά να το εξηγείς. Κάθε φορά που ξεκινούσε να μετράει τα πρόβατά του, αντί να σπκώνει δάχτυλα, άρχιζε να βάζει πετραδάκια στο πήλινο πιάτο, κι όταν έφτανε στα δέκα, άδειαζε το κουτί αυτό κι έβαζε μια πέτρα στο ξύλινο πιάτο, και μετά συνέχιζε το μέτρημα και ξανάρχιζε να γεμίζει το πήλινο πιάτο ως το δέκα. Αν στο τέλος είχε –για παράδειγμα– τέσσερις πέτρες μέσα στο ξύλινο πιάτο κι άλλες τρεις στο πήλινο, ήξερε ότι έπρεπε να μετρήσει τέσσερις φορές δέκα πρόβατα, κι άλλα τρία, μ' άλλα λόγια σαράντα τρία.»

«Κι όταν έφτανε να 'χει δέκα πέτρες μέσα στο ξύλινο πιάτο;»

«Καλή ερώτηση. Τότε έπαιρνε ένα τρίτο πιάτο, σιδερένιο, κι έβαζε μέσα μια πέτρα που άξιζε όσο οι δέκα πέτρες του ξύλινου. Μετά, άδειαζε το ξύλινο πιάτο του. Έτσι, ήξερε πως η πέτρα στο σιδερένιο πιάτο άξιζε όσο δέκα πέτρες του ξύλινου που άξιζαν η καθεμιά όσο δέκα πέτρες του πήλινου.»

«Κάτι που σημαίνει πως η πέτρα στο μεταλλικό πιάτο αντιστοιχούσε σε εκατό πρόβατα.»

«Πολύ καλά, βλέπω πως το 'πιασες το θέμα. Έτσι λοιπόν, στο τέλος της ημέρας, μετά τη βοσκή, κι αφού είχε κλείσει τα πρόβατα στο μαντρί, ο βοσκός βρισκόταν, ας πούμε, κάπως έτσι...» είπε ο άντρας και ξαναπήρε το μολύβι της Αλίκης για να ζωγραφίσει στο τετράδιό της:



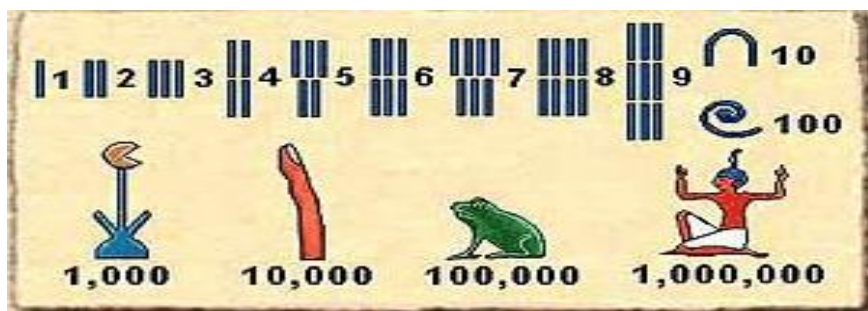
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Με την βοήθεια του οδηγού των συστημάτων αρίθμησης που έχετε, μπορείτε να γράψετε τον αριθμό 1253 σε όλα τα συστήματα αρίθμησης;
2. Το σχολείο που θα επισκεφθούμε είναι από τα πρότυπα και εφαρμόζονται σε αυτό αρκετά καινοτόμα προγράμματα. Ενδεικτικά σας λέω ότι το πρόγραμμα μαθημάτων του αρχίζει στις 08:30 και διαρκεί 455 λεπτά. Μπορείτε να υπολογίσετε τι ώρα χτυπάει το κουδούνι για το τέλος των μαθημάτων;



ΘΕΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΙΓΥΠΤΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΗΣΗΣ



ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

τή σφήνα > για τρεις μονάδες,
 τή γωνιά < για τρεις δεκάδες.

Τ	1	Π	2	ΠΠ	3	▽	4
▽▽	5	ΠΠΠ	6	▽▽	7	▽▽	8
▽▽▽	9	<	10	<Τ	11	<Π	12
<ΠΠ	13	<▽	14	<▽▽	15	<▽▽	16
<▽▽	17	<▽▽	18	<ΠΠΠ	19	«	20
«	30	«	40	«	50	Τ	60

ΑΡΧΑΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Γράμμα	Αξία	Γράμμα	Αξία	Γράμμα	Αξία	Γράμμα	Αξία
Α´	1	Ι´	10	Ρ´	100	Α	1000
Β´	2	Κ´	20	Σ´	200	Β	2000
Γ´	3	Λ´	30	Τ´	300	Γ	3000
Δ´	4	Μ´	40	Υ´	400	Δ	4000
Ε´	5	Ν´	50	Φ´	500	Ε	5000
Ζ´	6	Ξ´	60	Χ´	600	Ζ	6000
Ζ´	7	Ο´	70	Ψ´	700	Ζ	7000
Η´	8	Π´	80	Ω´	800	Η	8000
Θ´	9	Ϛ´	90	ϛ´	900	Θ	9000

ΡΩΜΑΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC		
20	30	40	50	60	70	80	90		
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

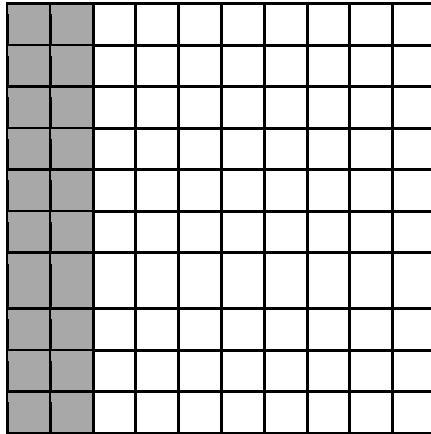




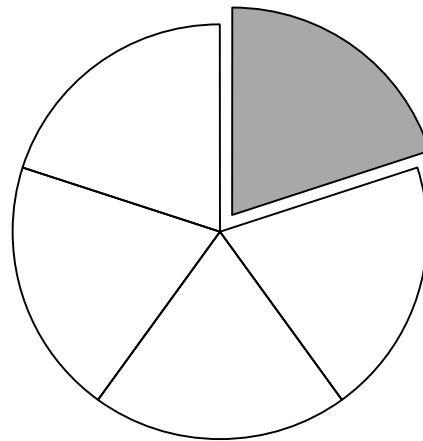
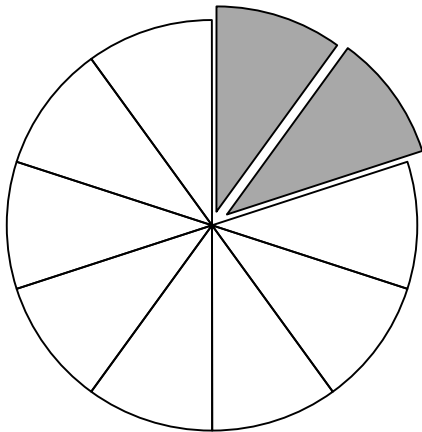
ΘΕΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3. Γράψτε έπειτα από συζήτηση στην ομάδα σας το μέρος του όλου που φαίνεται να απεικονίζεται.

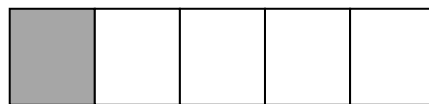
.....



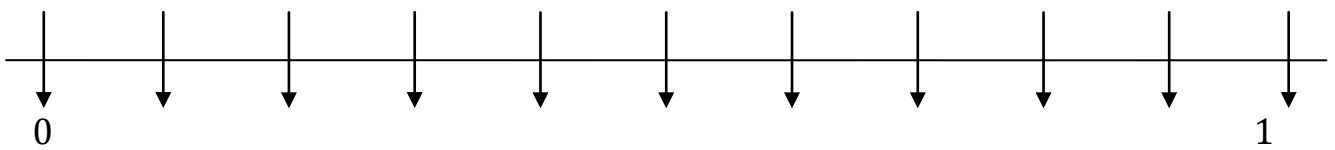
.....



.....



.....



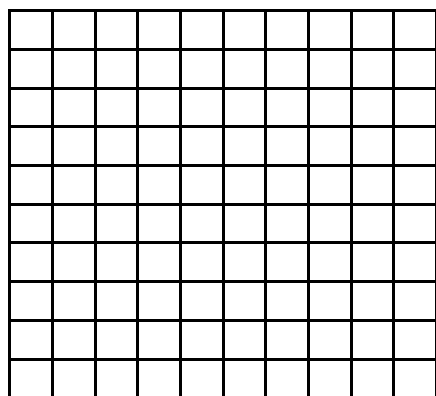
Μονάδες	Δέκατα	Εκατοστά

Ποιο είναι εκείνο το συμπέρασμα που οδηγείστε βλέποντας όλες αυτές τις διαφορετικές αναπαραστάσεις;

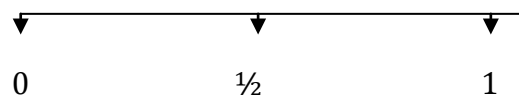
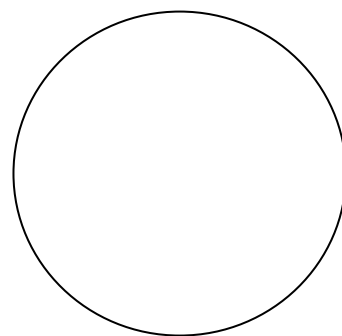


ΘΕΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

4. Να μετατρέψετε και να αποτυπώσετε τα ποσοστά σε κλάσματα:

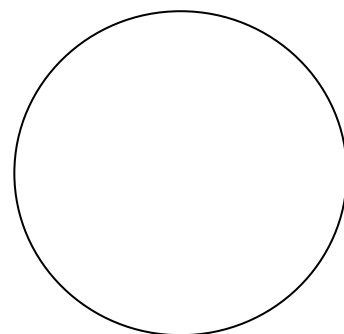
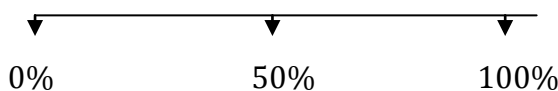
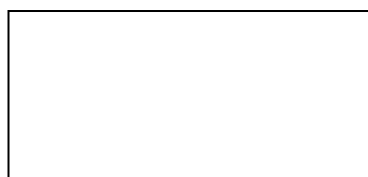


$$25\% = \frac{\quad}{100} = \frac{1}{\quad}$$



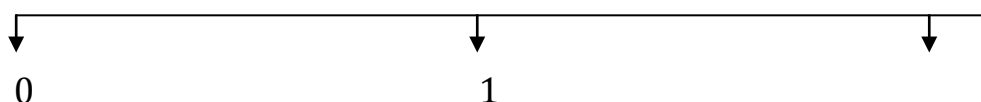
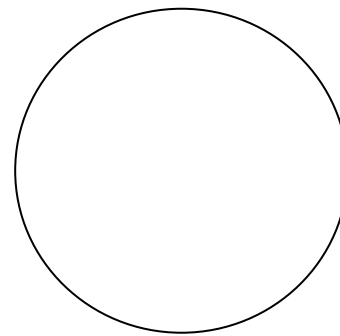
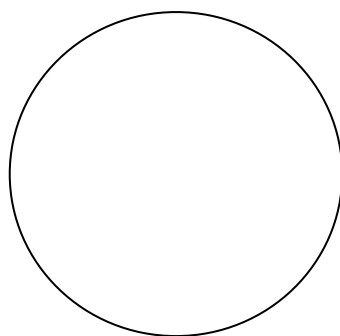
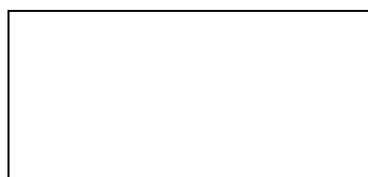
5. Να μετατρέψετε και να αποτυπώσετε το κλάσμα σε ποσοστό.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{\quad} = \frac{\quad}{100} = \dots\%$$



6. Να μετατρέψετε και να αποτυπώσετε το κλάσμα σε ποσοστό και σε δεκαδικό.

$$\frac{3}{2} = \frac{\quad}{100} = \dots\% = \dots, \dots$$





ΘΕΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

10. Στην ομάδα σας έχετε ράβδους διαφορετικού χρώματος.

Αν η μπλε ράβδος είναι το όλο τι κλάσμα αντιπροσωπεύει μια ανοιχτή πράσινη ράβδος;

Απάντηση:

Αν η ροζ ράβδος είναι το όλο τι κλάσμα αντιπροσωπεύει η καφέ ράβδος;

Απάντηση:

Αν δύο κόκκινες ράβδοι αντιπροσωπεύουν το κλάσμα $2/5$ ποιά ράβδος είναι το όλο;

Απάντηση:

Αν η ανοιχτή πράσινη ράβδος είναι το όλο τι κλάσμα αντιπροσωπεύει η πορτοκαλί;

Απάντηση:

11. Συζητώντας με την ομάδα σας βρείτε τρόπους και συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα

$4/5$ $4/9$

$4/7$ $5/7$

$3/8$ $4/10$

$5/3$ $5/8$

$3/4$ $9/10$

$3/8$ $4/7$

$7/9$ $4/9$

$3/5$ $3/7$

$5/8$ $6/10$

$9/8$ $4/3$

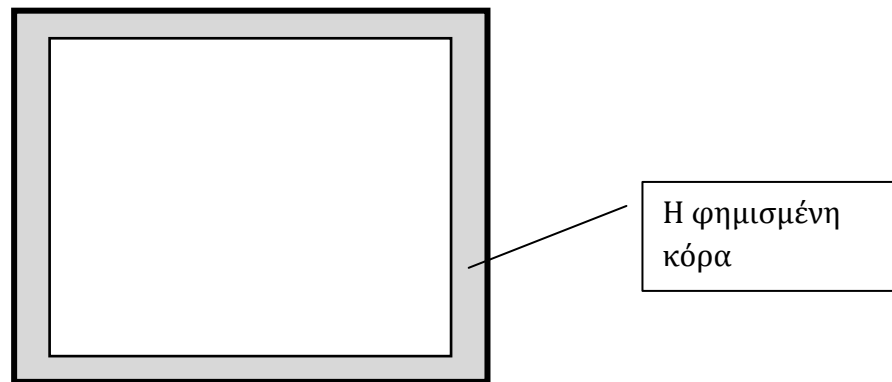
$4/6$ $7/12$

$8/9$ $7/8$

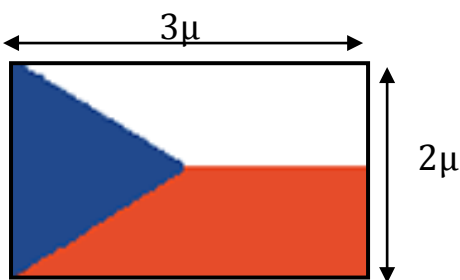
ΔΥΣΗ (Για την λύση χρησιμοποιείτε κάποιο από τα υλικά που γνωρίζετε).



12. Τρεις φίλοι επισκέπτονται την περίφημη πιτσαρία του Γιωναννί και παραγγέλλουν την φημισμένη για την κόρα της πίτσα. Φτάνοντας ύστερα από κάποια ώρα η πίτσα στο τραπέζι τους διαπιστώνουν ότι η πίτσα που τόσο υπέροχα μυρίζει έχει σχήμα τετράγωνο και όχι κυκλικό. Μπορείτε να βοηθήσετε τους τρεις φίλους να μοιράσουν την πίτσα με τον πιο δίκαιο τρόπο; (Να φάνε τα ίδια κομμάτια και την ίδια κόρα;)



13. Για το Μουντιάλ ποδοσφαίρου πρέπει να κατασκευάσουμε 4 σημαίες της Τσεχίας σύμφωνα με τις διαστάσεις του σχήματος:



Αν τα υφάσματα που μπορώ να αγοράσω έχουν φάρδος (πλάτος) 1 και 1,5 μέτρα. Πόσα μέτρα υφάσματος από κάθε χρώμα (Μπλέ, Κόκκινο, Άσπρο) θα χρειαστεί να αγοράσουμε χωρίς να μας περισσέψει καθόλου ύφασμα;

Όπου τριάντα πέντε καμήλες πρέπει να μοιραστούν σε τρεις άραβες αδελφούς. Πώς ο Μπέρεμιζ Σαμίρ, κάνοντας μια φαινομενικά αδύνατη διαίρεση, άφησε ικανοποιημένους και τους τρεις αδελφούς που διαφωνούσαν. Το απρόσμενο κέρδος που είχαμε από αυτή τη συναλλαγή.

Ταξιδεύαμε χωρίς στάση για κάμποσες ώρες, όταν συνέβη ένα επεισόδιο που αξίζει να αναφερθεί, και στο οποίο ο φίλος μου ο Μπέρεμιζ έβαλε όλη την τέχνη του ως διακεκριμένος θεράπων της άλγεβρας.

Κοντά σε κάποιο παλιό, μισοεγκαταλελειμμένο πανδοχείο, διακρίναμε τρεις άνδρες που λογομαχούσαν έντονα δίπλα σ' ένα κοπάδι από καμήλες. Με φωνές και διαπληκτισμούς, οι άνδρες χειρονομούσαν και συζητούσαν τόσο δυνατά, που μπορέσαμε να ακούσουμε τα λεγόμενά τους:

«Δεν μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο!»

«Είναι σκέτη ληστεία!»

«Εγώ πάντως δεν συμφωνώ με τίποτα!»

Ο πανέξυπνος Μπέρεμιζ τούς ρώτησε γιατί φιλονικούσαν.

«Είμαστε αδέρφια» εξήγησε ο μεγαλύτερος «και κληρονομήσαμε αυτές τις 35 καμήλες. Σύμφωνα με την τελευταία επιθυμία του πατέρα μας, οι μισές ανήκουν σε εμένα, το ένα τρίτο στον αδελφό μου τον Χαμίντ, και το ένα ένατο στον Χαρίμ, τον μικρότερο αδελφό. Όμως δεν ξέρουμε πώς να τις μοιράσουμε, και οτιδήποτε προτείνει ο ένας, οι άλλοι δύο το απορρίπτουν. Δοκιμάσαμε πολλές λύσεις μέχρι τώρα, αλλά καμία δεν έγινε αποδεκτή απ' όλους μας. Αφού το μισό τού 35 είναι $17\frac{1}{2}$, και αφού ούτε το ένα τρίτο ούτε το ένα ένατο είναι ακέραιοι αριθμοί, πώς μπορούμε να τις μοιράσουμε;»

«Πολύ απλό» απάντησε ο Άνθρωπος Που Μετρούσε. «Σας υπόσχομαι να κάνω δίκαιη τη μοιρασιά, αλλά επιτρέψτε μου πρώτα να προσθέσω στην κληρονομιά σας, δηλαδή στις 35 καμήλες, αυτό το υπέροχο ζωντανό που μας έφερε εδώ τούτη την κατάλληλη στιγμή.»

Τότε ακριβώς μπήκα στη μέση ανήσυχος:

«Δεν θα επιτρέψω τέτοια τρέλα. Πώς θα συνεχίσουμε το ταξίδι μας αν μείνουμε εμείς χωρίς καμήλα;»

«Μην ανησυχείς, φίλε μου από τη Βαγδάτη» μου ψιθύρισε ο Μπέρεμιζ. «Ξέρω πολύ καλά τι κάνω. Δώσε μου την καμήλα σου και θα δεις το αποτέλεσμα.»

Ο τόνος της φωνής του μου ενέπνευσε τέτοια εμπιστοσύνη που, χωρίς τον παραμικρό δισταγμό, του παρέδωσα την όμορφη μου Τζαμάλ, η οποία προστέθηκε στο πλήθος που έπρεπε να μοιραστεί στα τρία αδέρφια.

«Φίλοι μου» τους είπε «πρόκειται να κάνω μια ακριβοδίκαιη διαίρεση των καμηλών που τώρα, όπως βλέπετε, είναι 36.»



Ο Άνθρωπος Που Μετρούσε

Μια αλληγορική
ρομπωτική παραστασία
για ταχέως αλλαγές



Απευθύνθηκε τότε στο μεγαλύτερο από τα αδέρφια και είπε τα εξής: «Εσύ θα έπαιρνες το μισό του 35, δηλαδή $17\frac{1}{2}$. Τώρα θα πάρεις το μισό του 36, δηλαδή 18. Δεν πρέπει να παραπονιέσαι, γιατί θγαίνεις κερδισμένος από τη διαίρεση αυτή.»

Γυρνώντας στον δεύτερο κληρονόμο, συνέχισε: «Εσύ, Χαμίντ, θα έπαιρνες το ένα τρίτο του 35, δηλαδή 11 και κάτι. Τώρα θα πάρεις το ένα τρίτο του 36, δηλαδή 12. Μη φέρεις λοιπόν αντίρρηση, γιατί κι εσύ κερδίζεις απ' αυτή τη μοιρασιά.»

Τέλος, στράφηκε στον νεότερο: «Κι εσύ, νεαρέ Χαρίμ, σύμφωνα με την τελευταία επιθυμία του πατέρα σου, επρόκειτο να πάρεις το ένα ένατο του 35, δηλαδή 3 καμήλες και κάτι. Εγώ όμως θα σου δώσω το ένα ένατο του 36, δηλαδή 4. Έχεις κι εσύ ευνοηθεί σημαντικά, άρα θα πρέπει να με ευγνωμονείς για τούτο.»

Και ολοκλήρωσε με μέγιστη αυτοπεποίθηση: «Με αυτή την επικερδή μοιρασιά, η οποία σας ευνόησε όλους, 18 καμήλες ανήκουν στον μεγαλύτερο, 12 στον επόμενο και 4 στον νεότερο· αυτό μας κάνει $18 + 12 + 4$, δηλαδή 34 καμήλες. Συνεπώς, από τις 36 καμήλες περισσεύουν 2. Η μία, όπως ξέρετε, ανήκει στο φίλο μου από τη Βαγδάτη. Η άλλη ανήκει δικαιοματικά σε μένα, διότι έλυσα αυτό το δύσκολο πρόβλημα κληρονομιάς και μείνατε όλοι σας ικανοποιημένοι.»

«Ξένε, είσαι πολύ έξυπνος άνθρωπος» αναφώνησε ο μεγαλύτερος από τους αδελφούς «και δεχόμαστε τη λύση σου με την πεποίθηση ότι είναι ακριβοδίκαιη». Ο πανέξυπνος Μπέρεμιζ, ο Άνθρωπος Που Μετρούσε, διάλεξε ένα από τα καλύτερα ζωντανά του κοπαδιού και, παραδίδοντας σε μένα τα γκέμια της καμήλας μου, είπε: «Καλέ μου φίλε, μπορείς να συνεχίσεις με άνεση και ηρεμία το ταξίδι με την καμήλα σου. Τώρα έχω κι εγώ τη δική μου για να με κουβαλά.»

Και συνεχίσαμε το ταξίδι μας προς τη Βαγδάτη.

14. Στη περιπέτεια των υποζυγίων, («Ο άνθρωπος που μετρούσε») η απάντηση στο πρόβλημα ικανοποιεί με τον καλύτερο τρόπο όλες τις πλευρές. Αξίζει πιστεύω να συζητήσετε στην ομάδα σας και να απαντήσετε, αν μπορείτε: Πως είναι δυνατόν να είναι όλοι κερδισμένοι; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό το παράδοξο; Αν προσαρμόσετε το πρόβλημα στα υλικά που έχετε, πιστεύετε ότι είναι δυνατή μια απάντηση που να εξηγεί το παράδοξο;

ΛΥΣΗ